第 6 講　複素数の極形式，乗法・除法

PART1 複素数の極形式

要点整理と公式

要点 ① 極形式

複素数平面上で，0 でない複素数 $z=a+bi$ が表す点を P とする。

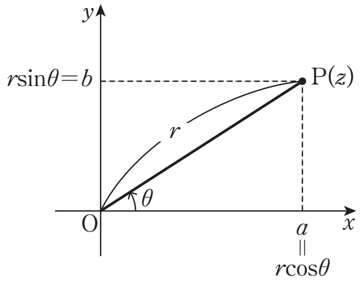
OP $=r$ とし，実軸の正の部分を始線としたときの動径 OP が表す角を θ とすると

$a=$　　　，$b=$

であるから

$z=a+bi=r\cos\theta+(r\sin\theta)i=$

と表される。これを，複素数 z の「　　　　」という。



このとき $r=\sqrt{a^2+b^2}=$　　である。

また，θ を複素数 z の「　　　」といい，　　z（argument：アーギュメント）で表す。

偏角 θ は，$0\leqq\theta<2\pi$ や $-\pi\leqq\theta<\pi$ の範囲ではただ 1 通りに定まる。

z の偏角の 1 つを θ とすると，一般的に　$\arg z=\theta+2\pi\times n$（$n$ は整数）と表される。

複素数の極形式

$z=a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

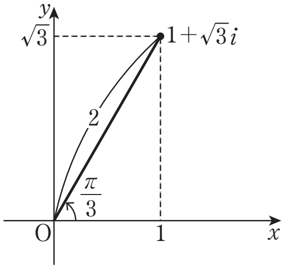
$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$，$\cos\theta=\dfrac{a}{r}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{r}$

(ex) 複素数 $1+\sqrt{3}\,i$ を極形式で表す

$r=$　　　　　　$=2$

$\cos\theta=\dfrac{\quad}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{\quad}{2}$ より，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

よって，$1+\sqrt{3}\,i=$



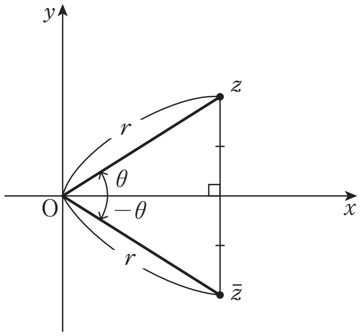
複素数 z と $\overline{z}$ は，実軸に関して対称であるから，
複素数 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ について

$$|\overline{z}|=|z|=\quad,\ \arg\overline{z}=-\arg z=$$

である。したがって

$$\overline{z}=\quad\{\cos(\quad)+i\sin(\quad)\}$$

である。



1 次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1) $-1+i$　　(2) $\sqrt{3}-3i$　　(3) $\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$　　(4) $3i$

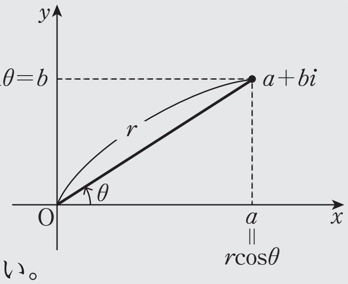
Point Pickup

複素数の極形式

$z \neq 0$ のとき　$z = a+bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\cos\theta = \dfrac{a}{r}$,　$\sin\theta = \dfrac{b}{r}$



複素数平面上に点を図示して考えるとよい。

※$z=0$ のとき，$r=0$ であるが，偏角 θ は定まらない。

第 6 講　PART1 確認問題

次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

答えは下の①～④のうちから選べ。

1　$-2+2i$　ア

① $2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$　② $2\sqrt{2}\left(\sin\frac{3}{4}\pi+i\cos\frac{3}{4}\pi\right)$

③ $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$　④ $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$

2　$1-\sqrt{3}\,i$　イ

① $2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$　② $\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi$

③ $2\left(\sin\frac{5}{3}\pi+i\cos\frac{5}{3}\pi\right)$　④ $2\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$

3　$\frac{1+i}{\sqrt{2}}$　ウ

① $\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$　② $\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$

③ $\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi$　④ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

4　$-2i$　エ

① $\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi$　② $2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

③ $2(\cos\pi+i\sin\pi)$　④ $2\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$

第 6 講　複素数の極形式，乗法・除法

PART1 複素数の極形式

1　次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1)　$-1+i$　　(2)　$\sqrt{3}-3i$　　(3)　$\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$　　(4)　$3i$

[解答]

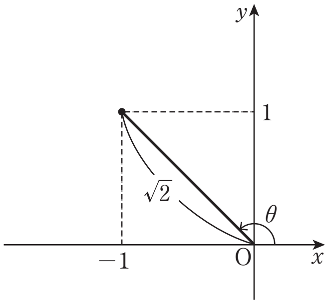
与えられた複素数の絶対値を r，偏角を θ とする。

(1)　$r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\cos\theta=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では，$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$

よって，$-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi+i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)$

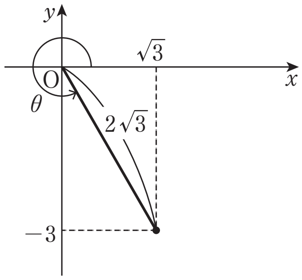


(2)　$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-3)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{-3}{2\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では，$\theta=\dfrac{5}{3}\pi$

よって，$\sqrt{3}-3i=2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{5}{3}\pi+i\sin\dfrac{5}{3}\pi\right)$



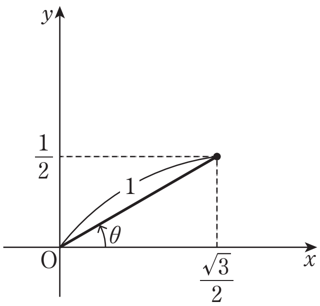
(3)　$\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

$r=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=1$

$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$

よって，$\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$

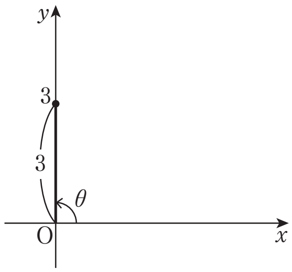


(4)　$r=\sqrt{0^2+3^2}=3$

$\cos\theta=\dfrac{0}{3}=0$，$\sin\theta=\dfrac{3}{3}=1$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$

よって，$3i=3\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$



第 6 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：③

[解説]

$-2+2i$ の絶対値を r，偏角を θ とする。

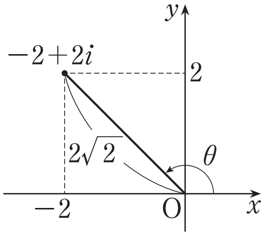
$$r=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$\cos\theta=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では，

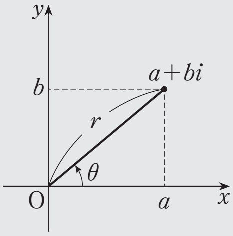
$$\theta=\frac{3}{4}\pi$$



よって，$-2+2i=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$

[A]

[A]　複素数の極形式
$z\neq 0$ のとき，
$z=a+bi$
$=r(\cos\theta+i\sin\theta)$
$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$
$\cos\theta=\frac{a}{r}$，$\sin\theta=\frac{b}{r}$



2

[正解] イ：④

[解説]

$1-\sqrt{3}\,i$ の絶対値を r，偏角を θ とする。

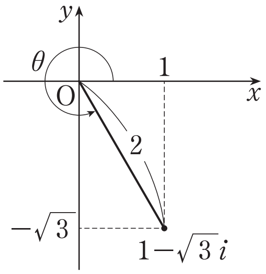
$$r=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2}$$

$$\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

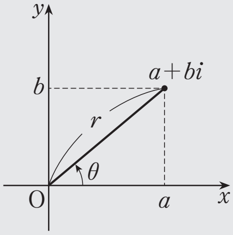
$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では，

$$\theta=\frac{5}{3}\pi$$



よって，$1-\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$ [B]

[B]　複素数の極形式
$z\neq 0$ のとき，
$z=a+bi$
$=r(\cos\theta+i\sin\theta)$
$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$
$\cos\theta=\frac{a}{r}$，$\sin\theta=\frac{b}{r}$



3　[正解] ウ：②

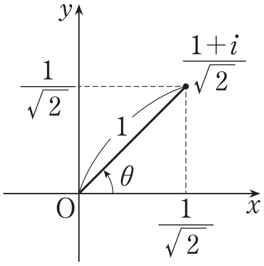
[解説]

$\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ の絶対値を r，偏角を θ とする。

$$r=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$$

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$



$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では，

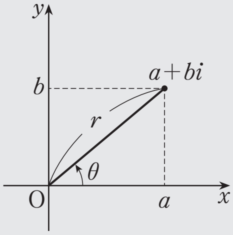
$$\theta=\frac{\pi}{4}$$

よって，$\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$ [C]

[C]　複素数の極形式

$z\neq0$ のとき，

$$z=a+bi$$
$$=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$
$$\cos\theta=\frac{a}{r},\quad \sin\theta=\frac{b}{r}$$



4　[正解] エ：④

[解説]

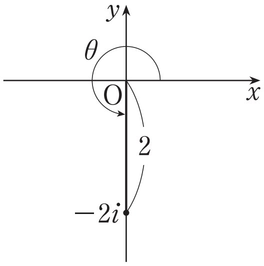
$-2i$ の絶対値を r，偏角を θ とする。

図より，

$$r=2$$

$$\cos\theta=\frac{0}{2}=0,$$

$$\sin\theta=\frac{-2}{2}=-1$$



$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では，

$$\theta=\frac{3}{2}\pi$$ [D]

[D]　$-2i$ は虚軸上の点だから，図から絶対値と偏角がわかる。

よって，

$$-2i=2\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$$